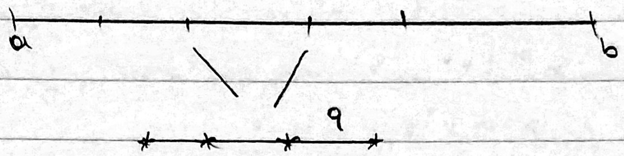
Μαθημα 10ο 10/12/2018

ΑΕΣΔΕ

▸ <u>Επαναληψη</u>

Κεντρικη ιδεα



$h = \frac{b-a}{N}$

- Με την μεθοδο $\boxed{RK}$ μπορω να παρω εσωτερικη διαμεριση
- Αυξανω ακριβεια μεθοδου, αυξανω συναρτησιακους υπολογισμους

$$\int_0^{\tau_i} f(s)\,ds = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad t^{n,j} \in [t^n, t^{n+1}]$$

- RK σε μορφη μητρωου

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} \qquad A \in \mathbb{R}^{q,q},\ \tau \in \mathbb{R}^q,\ b \in \mathbb{R}^q$$

→ 1) Αμεση Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array} \quad , q=1$$

2) Πεπλεγμενη Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \quad q=1$$

3) Μεσου

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

4) Τραπεζιου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

5) Αμεση RK.4

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \end{array}$$

▸ ΠΑΤ:

$$(1)\quad \begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ αναδρομική σχέση

$$(2)\quad \begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0, & n = 0,1,2,\dots,N-1 \end{cases}$$

6) Βελτιωμένη μέθοδος Euler

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

Επιλυσιμότητα μεθόδων RK

Σε μια άμεση RK ο πίνακας A είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός

■ Άμεσες:

Τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, οπότε είναι καλώς ορισμένα, δηλ. μονοσήμαντα.

■ Πεπλεγμένες:

Το σύστημα λύνεται μονοσήμαντα, τουλάχιστον για μικρό h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix}$$

πλήρης πίνακας χωρίς 0

■ Προταση

Εστω το ΠΑΤ $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Για την f ισχυει η ολικη Lipschitz και εστω οτι το $h < 1/\gamma$ με $\gamma = L \max \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$. Τοτε το συστημα εσωτερικων λυσεων

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

λυνονται μονοσημαντα ως προς τα $y^{n,i}$, $i = 1,2,\dots,q$

■ Σκιαγραφηση αποδειξης

Θεωρουμε την απεικονιση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ οπου

$$F_i(x) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x)$$

αν δειξω οτι ειναι συστολη με τοει σε ενα ακριβως σημειο σταθερο

για $h < \frac{1}{\gamma}$ ειναι συστολη, τοτε υπαρχει ενα σταθερο σημειο και αυτο θα ειναι το $y^{n,i}$, $i = 1,2,\dots,q$

■ Παρατηρηση

α) αν L πολυ μεγαλο τοτε h πολυ μικρο

β) η λυση $y^{n,i} \in \mathbb{R}^q$ μπορει να υπολογιστει:

1) Είτε με μια απλη επαναληπτικη μεθοδο

2) Ειτε με τη μεθοδο του Newton

↳ χρησιμοποιω 1η ταξης πληροφορια (γραμμικοποιηση)

$$\bar{y}^n = \bar{y}^0 - \frac{\bar{g}(t,\bar{y})|_{\bar{y}_0}}{J_g|_{\bar{y}_0}}$$

$y^{n,i} = y^n + h \sum a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \Rightarrow$

$y^{n,i} - y^n - h \sum a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) = 0 = g_i$

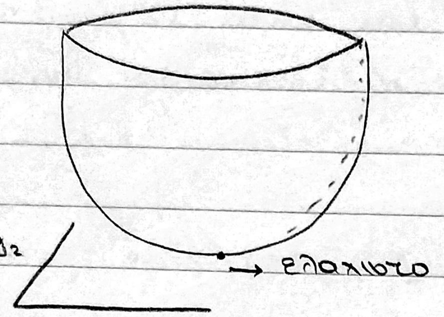
$$J_q = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y^{n,1}} & \frac{\partial g_1}{\partial y^{n,2}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y^{n,q}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_q}{\partial y^{n,1}} & \frac{\partial g_q}{\partial y^{n,2}} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial y^{n,q}} \end{vmatrix}$$

Ποια η g?

Ποια η J_q?

Σχηματικα πως θα ειναι η g; (επιφανεια σφαλματος)

$$\begin{cases} g_1 = \dots = 0 \\ g_2 = \dots = 0 \end{cases}$$



Ευσταθεια RK

Εσωτερικες Προσ.

$$(1)\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & j = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Εξωτερικες Προσ.

Προταση

Εστω μια μεθοδος RK (1), πληρουνται οι προϋποθεσεις του προηγουμενου θεωρηματος και $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγισεις που δινει η RK που οριζονται απο την (1).

Το ιδιο και για τις ποσοτητες $z^{n,i}$ και z^n

Δηλ.
$$\begin{cases} z^0 = z_0 \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + p^n & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

οπου $p^0, p^1, \dots, p^{N-1}$ δοσμενοι αριθμοι. Τοτε $\exists\, C_1, C_2$ ανεξαρτητα του h τ/ω

$$\max_n |y^n - z^n| \le C_1 \cdot |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_n |p^n|$$

Αποδειξη

$$\boxed{\gamma = L \max_i \sum_j |a_{ij}|}$$

$$|y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + hL \sum |a_{ij}|\, |y^{n,j} - z^{n,j}| \le$$

$$\le |y^n - z^n| + hL \max_n \sum_j |a_{ij}| \cdot \max_j |y^{n,j} - z^{n,j}| \Rightarrow$$

$$|y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \gamma \max_j |y^{n,j} - z^{n,j}| \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \max_i |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\gamma \max_j |y^{n,j} - z^{n,j}| \Rightarrow$$

$$\max_i |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \underbrace{\frac{1}{1-\gamma h}}_{\text{καινουργια σταθερα}} |y^n - z^n|$$

$\gamma h < 1 \Rightarrow 1 - \gamma h > 0$ αρα για $h \le h_0 < \frac{1}{\gamma}$ η $C = \frac{1}{1-\gamma h_0}$

Αρα $\max_i |y^{n,i} - z^{n,i}| \le C |y^n - z^n|$ (2)

Για τα εξωτερικα βηματα εχω:

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL \sum_i |b_i| \cdot |y^{n,i} - z^{n,i}| + |p^n| \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le \left(1 + ChL \sum_i |b_i|\right) |y^n - z^n| + |p^n| \Rightarrow$$

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le \cancel{X}' |y^n - z^n| + |p^n| \Rightarrow$$

$$\max_q |y^n - z^n| \le e^{c'(b-a)} |y^0 - z^0| + \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'h} \max_n |p^n|$$

οπου $c' = CL \sum_{i=1}^{q} |b_i|$

Για την ευσταθεια οταν $|p^n| = 0$ τοτε

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{c'(b-a)} |y^0 - z^0|$$